

La Conduction Thermique

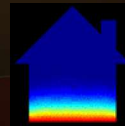
par Rafic YOUNES

ULFG – S9
Département Mécanique

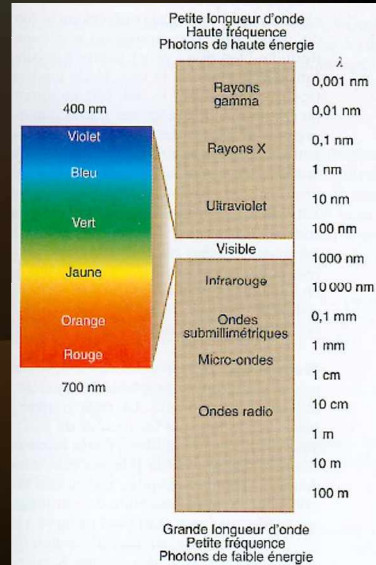
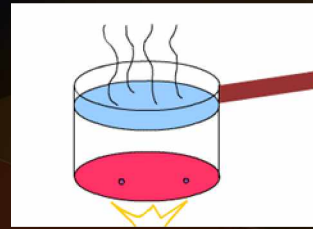
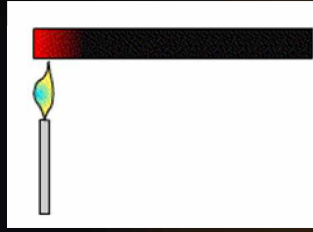


Plan

- 1 - Introduction et Généralités
- 2 - La conduction thermique
- 3 - L'équation de la chaleur
- 4 - Le coefficient de conduction
- 5 - Applications analytiques
- 6 - Applications numériques
- 7 - Applications sur pdetool
- 8 - Mesure de λ
- 9 - Résumé



1 - Introduction et Généralités



2 - La conduction thermique

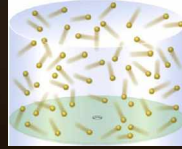
- Joseph FOURIER
- 1768-1830



- 1795 - étudiant puis enseignant à l'École Normale qui vient juste d'être ouverte
- 1795 - nomination de Fourier à l'École Polytechnique
- 1798 - arrive à Alexandrie avec Napoléon
- 1798 - secrétaire perpétuel de l'Institut d'Égypte
- 1802 - nommé préfet de Grenoble (Isère)
- 1808 - nommé baron par Napoléon
- 1817 - élu à l'Académie des sciences

2 - La conduction thermique

- Solides : La chaleur est conduite par :
 - 1. Électrons (métaux)
 - 2. Phonons (Isolants et semi-conducteurs)
- Fluides : Mouvements et collisions des molécules



Cause \rightarrow Effet
 $\text{grad} \cdot T$ \rightarrow $\vec{\varphi}(M,t)$

Loi de FOURIER :

$$\vec{\varphi}(M,t) = -\lambda \cdot \text{grad} \cdot T$$

W/m²

W/m²°K

°K/m

3 - Équation de la chaleur

- Expression locale de la loi physique exprimant un lien causal entre:



un apport d'énergie



une variation de température

$\Phi \cdot dt$
en Joules

implique

$\iiint \rho \cdot dv \cdot C \cdot dT$
en Joules

$- dt \cdot \iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds$

$dt \cdot \iiint p \cdot dv$

$dt \cdot \iiint \rho \cdot C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$



3 - Équation de la chaleur

L'ensemble des apports en Joules provoque une élévation de température dT

$$-dt \iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds + dt \cdot \iiint p dv = dt \cdot \iiint \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dv$$

(Formule d'Ostrogradski) : Transformation d'une intégrale de surface en une intégrale de volume.

$$\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} ds = \iiint \operatorname{div} \left(\vec{\varphi} \right) dv$$

$$\iiint \left[-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0$$

quel que soit le volume V dans lequel on calcule l'intégrale !



3 - Équation de la chaleur

Bilan thermique instantané satisfait localement en chaque point M du corps considéré

$$-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Loi de FOURIER :

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T$$

$$\operatorname{div} \left(\lambda \operatorname{grad} T \right) + p - \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

soit:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$



3 - Équation de la chaleur

Diffusivité thermique d'un corps :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$[a] = \frac{[ML^2T^{-3} L^{-1}\Theta^{-1}]}{[ML^{-3}][ML^2T^{-2} M^{-1}\Theta^{-1}]}$$
$$[a] = L^2T^{-1}$$

(Le cuivre a une diffusivité thermique $a = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$)



3 - Équation de la chaleur

Forme générale de l'équation de la chaleur

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Sans sources de chaleur internes,
et en régime permanent:

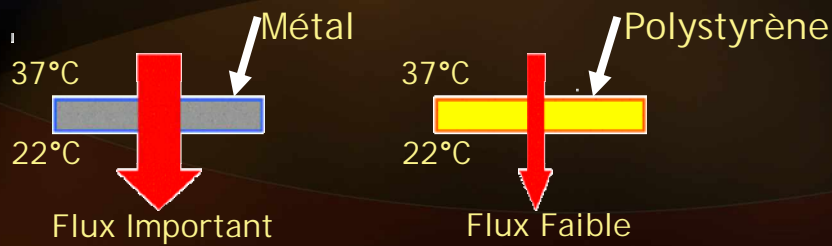
$$\Delta T = 0$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0$$

4 - Le coefficient de conduction

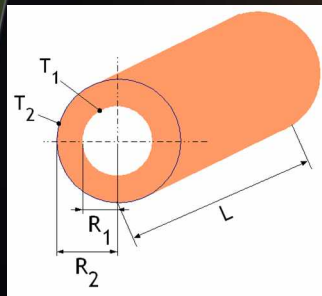
$\lambda : W/m^{\circ}K$

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique
Notation	ρ	C	λ
Unité	kg / m ³	J / (kg . K)	W / (m . K)
Argent	10500	230	418
Cuivre	8940	380	389
Aluminium	2700	860	200
Acier	7850	490	46
Béton	2300	960	0,92
Verre	2530	840	1,20
Polystyrène	44		0,025
Laine de verre	200	0,67	0,040



5 - Applications analytiques

Cas sans source volumique



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln \frac{r}{R_2} + T_2 \quad ; \quad P = \frac{2\pi L \lambda (T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$$

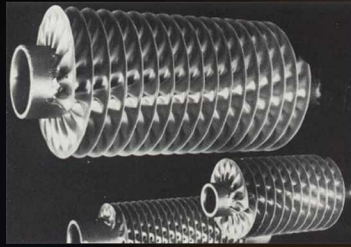


Cas avec source volumique

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \cdot r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \sigma_T = 0$$

$$T(r) = \frac{\sigma_T R_2^2}{4\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{R_2^2} \right) + \frac{T_2 - T_1 - \frac{\sigma_T}{4\lambda} (R_1^2 - R_2^2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{R_2} + T_2$$

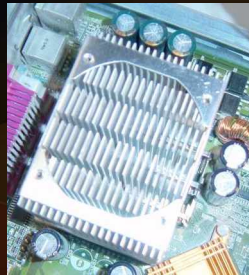
5 - Applications analytiques



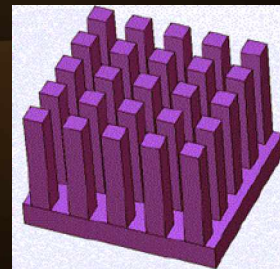
Tubes à ailettes



condenseur de BMW



Le radiateur Aqua 690

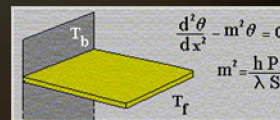


Ailettes rectangulaires



5 - Applications analytiques

AILETTES DE SECTION UNIFORME



Cas où l'on considère la convection au bout de l'ailette

$$\frac{\theta(x)}{\theta_p} = \frac{\cosh m(L-x) + \frac{h}{m\lambda} \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda} \sinh mL}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda S} \theta_p \frac{\sinh mL + \frac{h}{m\lambda} \cosh mL}{\cosh mL + \frac{h}{m\lambda} \sinh mL}$$

Cas où l'on considère le bout de l'ailette adiabatique

$$\frac{\theta(x)}{\theta_p} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda S} \theta_p \tanh mL$$

Cas limite d'une ailette infinie

$$\frac{\theta(x)}{\theta_p} = e^{-mx}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda S} \theta_p$$

Cas où l'on impose la température au bout de l'ailette

$$\frac{\theta(x)}{\theta_p} = \frac{\sinh m(L-x) + \frac{\theta_L}{\theta_p} \sinh mx}{\sinh mL}$$

$$\phi = \sqrt{hP\lambda S} \theta_p \frac{\cosh mL - \frac{\theta_L}{\theta_p}}{\sinh mL}$$

5 – Applications analytiques

La masse $M = \rho V$ reçoit par convection la puissance :

$$h \cdot S \cdot [T_f - T(t)]$$

L'équation de la chaleur conduit à :

$$\rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = h \cdot S \cdot [T_f - T(t)]$$

Si l'on pose : $\theta(t) = T_f - T(t)$ on $\theta'(t) = T'(t)$:

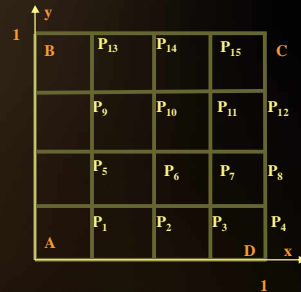
$$\theta'(t) + \frac{h \cdot S}{\rho \cdot c \cdot V} \cdot \theta(t) = 0$$

$$\frac{T(t) - T_f}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\frac{t}{\left(\frac{\rho V C_p}{h S}\right)}\right]$$

6 – Applications numériques

Un exemple simple :

On crée un transfert de chaleur dans une plaque de métal, en imposant une température de 0°C le long de ses côtés **AB** et **AD**, et une température de 100°C en son coin **C**



La distribution de température $T(x, y)$ dans la plaque est stationnaire. Elle est solution de l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\delta^2 T}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 T}{\delta y^2}$$



6 – Applications numériques

- Outils d'analyse numérique pour résoudre l'équation de Laplace :
- Discrétisation d'une fonction $f(x)$
- Approximation de la dérivée première $f'(x)$
- Approximation de la dérivée seconde $f''(x)$
- Discrétisation d'une fonction $f(x, y)$
- Approximations des dérivées partielles
- Approximation de l'opérateur Laplacien



6 – Applications numériques

A partir du développement en série de Taylor:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

on peut construire une approximation centrée de la dérivée première:

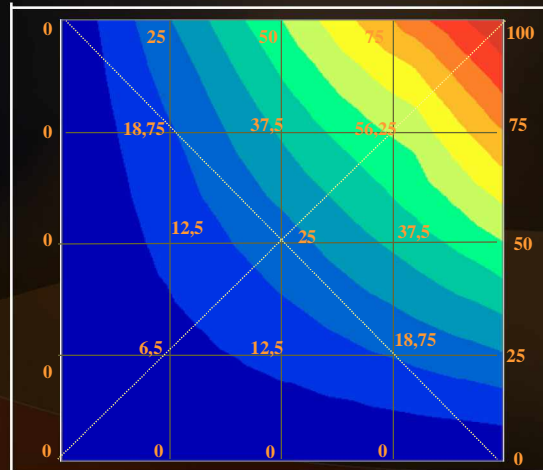
$$f'_i(x) = \frac{f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

On construit de même une approximation centrée de la dérivée seconde:

$$f''_i(x) = \frac{f_{i+1}(x) - 2f_i(x) + f_{i-1}(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

6 - Applications numériques

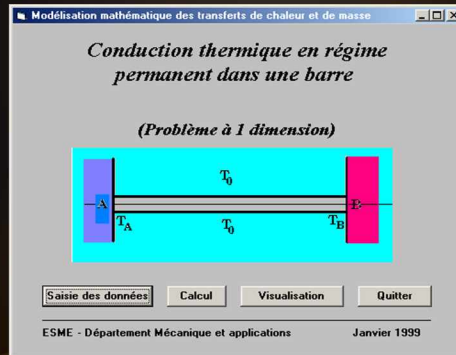
Visualisation des isothermes calculées



7 - Applications sur pdetool

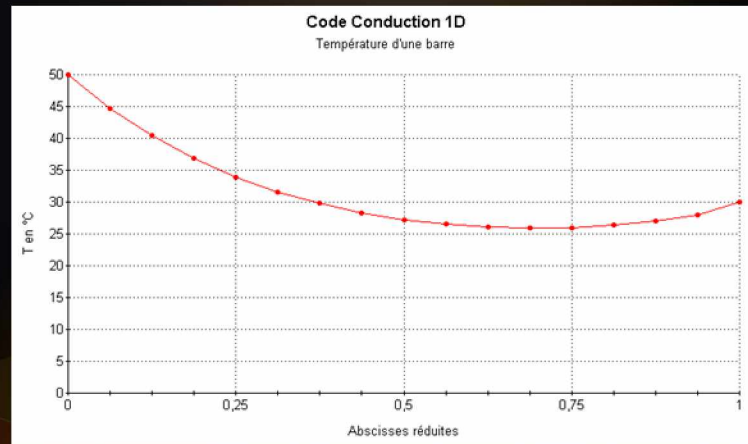
- 1D: Transmission de chaleur dans une barre
- 2D: Équilibre thermique d'un igloo
- 2D, transitoire : Trempe d'une bille d'acier.

7 - Applications sur pdetool : Barre



- Température à l'extrémité A: 50 °C
- Température à l'extrémité B: 30 °C
- Température de l'air ambiant: 18 °C
- Conductivité thermique de la barre: 389 W/(m.°C)
- Coefficient de transfert convectif: $h(x) = 2 - 8x(x-1)$ W/(m².°C)

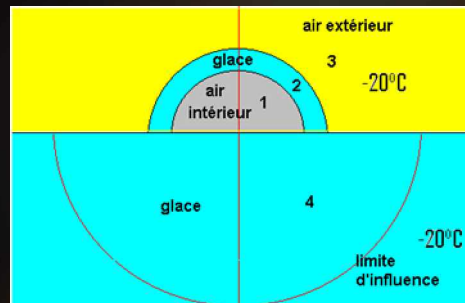
7 - Applications sur pdetool : Barre



7 - Applications sur pdeTool : Igloo

- Un demi hémisphère en glace de 50 cm d'épaisseur, et de diamètre intérieur 1,80 m, est posé sur la banquise.
- L'air extérieur et la banquise sont à -20°C
- 2 esquimaux dégagent dans l'igloo de la chaleur, avec une puissance de 300 W, soit 25 W/m^3
- Quelle est la température dans l'igloo?

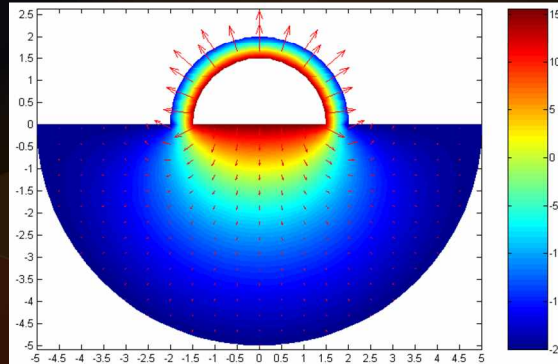
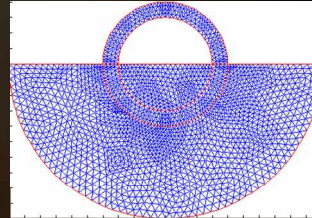
7 - Applications sur pdeTool : Igloo



- Conductivité thermique de la glace :
 $\lambda = 0,15 \text{ W/(m}\cdot^{\circ}\text{C)}$
- Conductivité thermique de l'air dans l'igloo :
 $\lambda = 100 \text{ W/(m}\cdot^{\circ}\text{C)}$
- Coefficient d'échange des parois intérieures et du sol :
 $h = 6 \text{ W/(m}^2\cdot^{\circ}\text{C)}$
- Coefficient d'échange des parois extérieures:
 $h = 15 \text{ W/(m}^2\cdot^{\circ}\text{C)}$

7 - Applications sur pdeTool : Igloo

maillage utilisé pour la résolution en éléments finis



7 - Applications sur pdeTool : Trempe

- Un sphère en acier initialement chauffé à T_0 est introduite dans un grand réservoir d'eau à la température T_f . L'évolution de la température de la sphère avec le temps est recherchée, le bain étant admis isotherme. Le bilan thermique dans le solide s'écrit :

$$\rho \cdot C \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = s$$

- Avec s est une source de chaleur volumique interne dans le solide. A la surface de la sphère ($r=R$), le flux de chaleur par convection est égal au flux de chaleur par conduction. On peut écrire :

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = h \cdot [T(R) - T_f]$$

λ est un coefficient de conduction, h est un coefficient de convection.



7 - Applications sur pdetool : Trempe

Simuler l'évolution dans le temps en tenant compte des données suivante :

$\lambda = 110$	$\text{Rayon} = 0.01 \text{ m.}$	$\rho = 7850$	$C = 46$
		$T_f = 30.$	$T_o = 650$
			$h = 450$

